2º
medio

Aprendo
en línea

Orientaciones para el trabajo
con el texto escolar

Clase 38

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

El objetivo de esta clase es determinar la cantidad de soluciones reales de una ecuación cuadrática y la pertinencia de éstas en situaciones cotidianas.

OA4

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

Recuerda que al considerar la ecuación cuadrática $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con $\mathbf{a \neq 0}$, se pueden obtener las soluciones, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, directamente mediante las siguientes fórmulas generales:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En la clase anterior vimos como los valores de los factores **a**,**b** y **c** de una ecuación cuadrática nos permitían obtener las soluciones $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ mediante el uso de la fórmula general. Hoy veremos cuándo las soluciones de una ecuación son pertinentes para el problema planteado y ademas cuántas soluciones reales podemos encontrar.

Ejemplo: En un partido de básquetbol se lanza un balón desde la marca del triple. Éste lleva una rapidez inicial de 8 m/s y la altura “y” en metros que alcanza el balón después de “t” segundos está dada por la ecuación de lanzamiento:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{5} g \cdot t^2$$

a) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el balón este a 6m de altura?
b) ¿Cuándo alcanzará el suelo?
c) ¿Cuándo el objeto estará al 12m de altura?

Paso 1: Identifica los datos del problema y determina la ecuación que representa la situación

✓Rapidez inicial: 8 m/s
✓ Aceleración de gravedad: 10 m/s^2 aprox
✓Altura: 6m,0m,12m
✓Incógnita: (t) tiempo

✓Se reemplazan los valores en la ecuación de lanzamiento: $\mathbf{y = 8t - 2t^2}$

Paso 2: En cada caso, iguala la ecuación a 0, e identifica los coeficientes a,b y c. Luego resuelve la ecuación con la fórmula general

Ecuación Cuadrática	Coeficientes			Fórmula general	Soluciones	
	a	b	c		t_1	t_2
$6 = 8t - 2t^2$	−2	8	−6	$t = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)}$	3	1
$0 = 8t - 2t^2$	−2	8	0	$t = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}}{2 \cdot (-2)}$	0	4
$12 = 8t - 2t^2$	−2	8	−12	$t = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-2)}$	No tiene	No tiene

Paso 3: Comprueba la pertinencia de las soluciones

¿Las soluciones obtenidas satisfacen el problema dado?

Altura	Soluciones		¿Es pertinente?, ¿por qué?
	t_1	t_2	
6m	3	1	Ambos, uno cuando está subiendo el balón y el otro es cuando está bajando.
0m	0	4	Solo 4, cero es cuando no se ha lanzado el balón.
12m	No tiene	No tiene	Nunca alcanzará los 12m de altura

En conclusión, puede que nuestro problema no necesariamente tenga solución real, y cuando lo tenga hay que verificar que su valor sea pertinente al problema planteado, es decir, tenga sentido para éste.

Actividad 1

Copia y resuelve en tu cuaderno, paso a paso, el problema de la página 112 del **Texto del Estudiante** y considéralo como otro ejemplo para resolver el siguiente problema:

"La posición de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba está dada por la expresión algebraica $\mathbf{y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$, donde $\mathbf{v_0}$ es la rapidez inicial con que se lanza el objeto, **t**, el tiempo transcurrido, **g** la aceleración de gravedad, que se puede aproximar por **10 m/s²**, e $\mathbf{y_0}$ la altura inicial del objeto. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio **15m** de altura, con una rapidez inicial de **10 m/s**. ¿Cuánto tiempo demorará la pelota en llegar al suelo? ¿Por qué?"

Observa que de los ejercicios anteriores podemos darnos cuenta que no siempre hay soluciones que nos sirven para explicar algunos fenómenos y otros que simplemente pueden tener o no solución. Esto está dado por la llamada **"naturaleza de las soluciones"** en las ecuaciones cuadráticas, es así que en matemática podemos determinar si una ecuación de este estilo tiene o no soluciones además de su cantidad. Es posible calculando el valor del **"discriminante"** que se simboliza con la letra griega delta (Δ) y se obtiene de la expresión:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Cumple con las siguientes características:

Si $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac > 0}$, la ecuación tiene **dos soluciones** en los números reales.

Si $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac = 0}$, la ecuación tiene **una solución** en los números reales.

Si $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac < 0}$, la ecuación **no tiene solución** en los números reales.

Ejemplo:

veamos si la ecuación $\mathbf{3x^2 - 6x - 5 = 0}$ tiene solución en los reales

Identificamos los valores de a, b y c y los reemplazamos en la fórmula

$\mathbf{a = 3}$, $\mathbf{b = -6}$, $\mathbf{c = -5}$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)$

$\Delta = 36 + 60$

$\Delta = 96$, **como es mayor a cero, la ecuación tiene dos soluciones reales.**

Actividad 2
Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución en los números reales usando el ejemplo anterior.

a) $3x^2 + 5 - 1 = 0$

b) $-x^2 - 2 + 10 = 0$

Cierre

Evaluación
Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta

1 **De acuerdo a la siguiente ecuación cuadrática $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ¿Cuál es el valor de su discriminante?**

a) $\Delta = 6$
b) $\Delta = 16$
c) $\Delta = 12$
d) $\Delta = -12$

2 **De acuerdo a la ecuación cuadrática $5x^2 - 3x - 2 = 0$, determine la cantidad de soluciones:**

a) *1 solución*
b) *no tiene soluciones reales*
c) *2 soluciones*
d) *Ninguna de las anteriores*

3

¿Cuál valor no es pertinente para y, sabiendo que la ecuación que modela el lanzamiento vertical de un objeto tiene la forma $y = 16x - 5x^2$; donde "x" corresponde al tiempo e "y" a su altura alcanzada?

a) $y = 0$
b) $y = 12$
c) $y = 80$
d) $y = 8$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número ______ fue: ___________________________________.

2º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

2. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 16 m/s. La altura ***y*** en metros que alcanza el objeto después de ***t*** segundos está dada por la ecuación del lanzamiento vertical:

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

a. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el objeto esté a 12 metros del suelo?

b. ¿Cuándo alcanzará el suelo el objeto?

c. ¿Cuándo el objeto estará a 80 metros del suelo?

PASO 1 Identifica los datos del problema y determina la ecuación que representa la situación.

- Rapidez inicial: 16 m/s
- Aceleración de gravedad: 10 m/s^2 aproximadamente.
- Altura: 12 m, 0 m y 80 m, respectivamente.
- Incógnita t: tiempo.

Se remplazan los valores en la ecuación de lanzamiento vertical: $y = 16t - 5t^2$

PASO 2 En cada caso, iguala la ecuación a 0, e identifica los coeficientes ***a***, ***b*** y ***c***. Luego, resuelve la ecuación.

Ecuación cuadrática	Coeficientes			Fórmula general	Soluciones	
	a	b	c		t_1	t_2
$12 = 16t - 5t^2$						
$0 = 16t - 5t^2$						
$80 = 16t - 5t^2$						

PASO 3 Comprueba la pertinencia de las soluciones.

¿Las soluciones obtenidas satisfacen el problema dado?

Altura	Soluciones		¿Es pertinente?, ¿por qué?
	t_1	t_2	
12 m			
0 m			
80 m			

¿Qué puedes concluir?

Comprendo la demostración

Observa cómo se aplican los pasos de la completación de cuadrados a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ para determinar la fórmula general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se simplifica por el valor de a $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Si tiene término libre en el lado derecho $\quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Se completa el cuadrado de binomio $\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Divide el coeficiente de x en 2, elévalo al cuadrado y súmalo a ambos lados de la igualdad.

Se factoriza $\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿Piensas que lo que está descrito está bien?, ¿por qué?

En resumen

Al considerar la **ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$; se pueden obtener sus soluciones, x_1 y x_2, directamente mediante las siguientes fórmulas generales:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Además, con la fórmula general se puede determinar la cantidad de soluciones reales de una ecuación cuadrática, sin necesidad de calcularlas rigurosamente, es decir, sin aplicar algún tipo de resolución.

Esto es posible calculando el valor del **discriminante** de una ecuación cuadrática, que se simboliza con la letra griega delta (Δ). Este valor, que se obtiene de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, cumple las siguientes características:

1º Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones** en los números reales.

2º Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene **una solución** en los números reales.

3º Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene solución** en los números reales.