3º medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 33

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

En esta clase conocerás y utilizarás las **funciones logarítmicas**, *(su estructura algebraica, dominio, recorrido, gráfica, utilización en la vida cotidiana).*

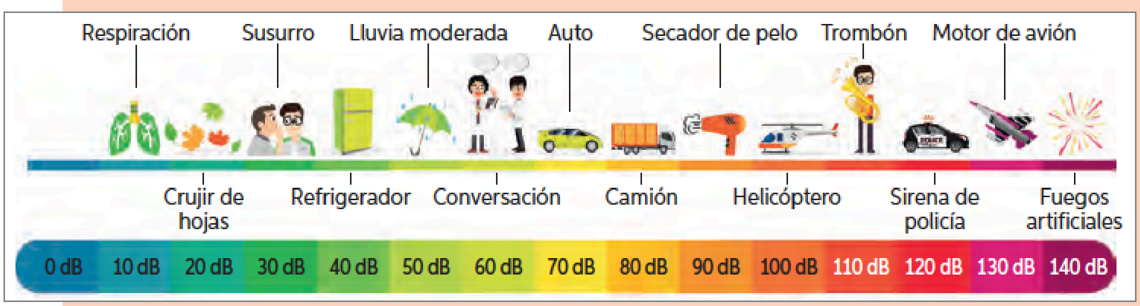
Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

Como viste anteriormente la función exponencial es un modelo matemático que se ajusta en diversos contextos de la vida, en este caso la ***función logarítmica*** también lo hace, una de ellas es en acústica en específico la intensidad del sonido, cuya fórmula se modela a través de un logaritmo. Observa lo que se explica de esta aplicación y los ejercicios **a** y **b** de la **lección 4** en la página 44 del **Texto del Estudiante.**

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m^2). La menor intensidad que puede captar el oído humano, llamado **umbral de audición,** es 10^{-12} W/m^2. A partir de 1 W/m^2, comienza el **umbral del dolor** en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función:

$\beta(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde β es el nivel de intensidad sonora medido en decibeles (dB), I es la intensidad del sonido en W/m^2 e I_0 es el umbral de audición (10^{-12} W/m^2).



a. Calcula el nivel de intensidad sonora (en decibeles) del umbral del dolor. Guíate por el siguiente ejemplo del umbral de audición.

$$\beta(10^{-12}) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta(10^{-12}) = 10\log 1$$

$$\beta(10^{-12}) = 0$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora del umbral de audición es 0 dB.

b. Escoge 3 situaciones de las que aparezcan en la imagen y calcula la intensidad de sonido (W/m^2) de cada una. Observa el ejemplo para el refrigerador (40 dB).

$$40 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$4 = \log I - \log(10^{-12})$$

Se aplican propiedades de logaritmo.

$$4 = \log I + 12\log 10$$

$$4 = \log I + 12$$

Se aplica la definición de logaritmo.

$$-8 = \log I \rightarrow I = 10^{-8}\ W/m^2$$

Escribe y analiza la definición de función logarítmica de la página 45 en el recuadro.

Se define **función logarítmica** como la función de la forma:

$$f(x) = \log_a x,\ \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1.$$

En ella se tiene que:

- Su **dominio** es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- Su **recorrido** es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- La gráfica **interseca** el **eje X** en el punto **(1, 0)** y no interseca el eje Y, que actúa como asíntota de la gráfica.

Existen varios fenómenos o situaciones de la naturaleza que son modelados mediante una función logarítmica. Por ejemplo: la intensidad del sonido, la magnitud de un sismo, la escala del pH, entre otros.

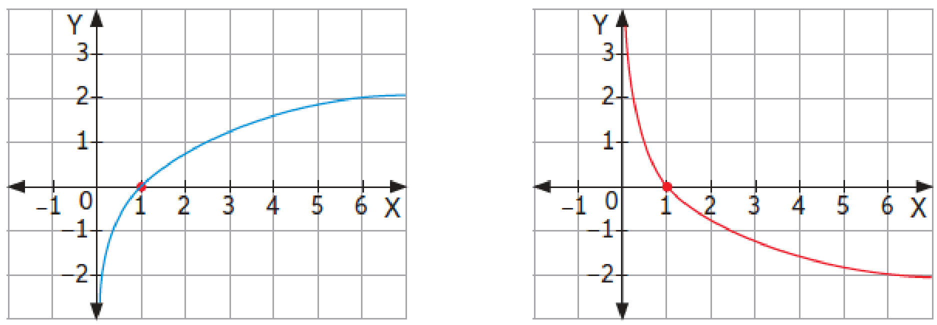
Actividad 1
Resuelve los **ejercicios 2** y **3** de la página 45 de tu **Texto del Estudiante.**

Puedes comprobar las respuestas anteriores en el **solucionario del Texto del Estudiante** página 226.

Escribe y analiza las características de la gráfica de la función logarítmica que se presenta en el cuadro de la página 47 de tu **Texto del Estudiante.**

La **gráfica** de una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$ depende del valor de a. Así:

Si $a > 1$ | Si $0 < a < 1$



La función es **creciente.** | La función es **decreciente.**

Además, mientras mayor es el valor de a, la función tiene un **mayor crecimiento.**

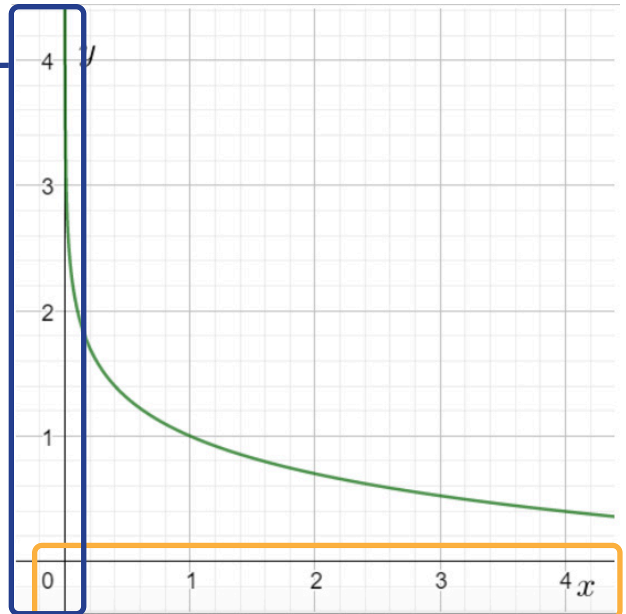
La gráfica de $y = \log_a x + b$ es una **traslación vertical** de b unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia arriba** si $b > 0$ y **hacia abajo** si $b < 0$.

La gráfica de $y = \log_a (x - c)$ es una **traslación horizontal** de c unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia la derecha** si $c > 0$ y **hacia la izquierda** si $c < 0$.

Actividad 2
Guiándote por el ejemplo dado completa el **ejercicio 5**, que se presenta en la página 47 de tu **Texto del Estudiante.**

Recuerda comprobar tus respuestas en el solucionario de la página 226 de tu **Texto del Estudiante.**

El dominio de una función corresponde a todos los valores reales que puede tomar la variable x, y el recorrido son todos los valores reales que se obtienen de la variable y o *f*(x).
En el caso de la primera función del **ejercicio 5** de la página 47 del **Texto del Estudiante** se tiene que su gráfica que obtuviste en la actividad 2 es:



Son los valores de y, es decir el recorrido, entendiendo que considera desde el ∞^+ y se extiende al ∞^-.

Son los valores de x, es decir el ***dominio***, entendiendo que no considera el 0 (el Eje y es una asíntota de la gráfica) y se extiende al ∞^+.

Entonces se puede concluir que el **Dominio de *f* es** $\mathbb{R}^+$ **y su recorrido es** $\mathbb{R}$.

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario del Texto del Estudiante**, página 227.

Actividad 3
Guiándote por el ejemplo anterior, completa el e**jercicio 6**, que se presenta en la página 47 de tu **texto del estudiante.**
Recuerda revisar tus respuestas en el **solucionario de tu Texto deL Estudiante**, página 227.

Los puntos de intersección de una función logarítmica se encuentran buscando el valor de x que provoca que $f(x)=0$ y el valor de $f(x)$ cuando $x=0$. Es decir, en el caso de la función a del **ejercicio 7** de la página 47 tiene que sus puntos de intersección son:

$$f(x) = \log(x + 10) = 0$$
$$\log(x + 10) = 0$$
$$\log_{10}(x + 10) = 0$$
$$10^0 = x + 10$$
$$1 = x + 10$$
$$1 - 10 = x$$
$$-9 = x$$

Recuerda que todo logaritmo que no tiene expresada su base tiene base 10.

Recuerda que todo logaritmo se puede expresar como una potencia, respetando el orden de cada número.

El primer punto de intersección es el (–9,0).

Si x = 0 se tiene

$$f(0) = \log(0 + 10) = \log_{10}10 = 1$$

El segundo punto de intersección es el (0,1)

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario de tu Texto del Estudiante**, página 227.

Actividad 4
Guiándote por el ejemplo anterior, completa el **ejercicio 7**, que se presenta en la página 47 de tu **texto del estudiante.**
Recuerda revisar tus respuestas en el **solucionario de tu Texto del Estudiante**, página 227.

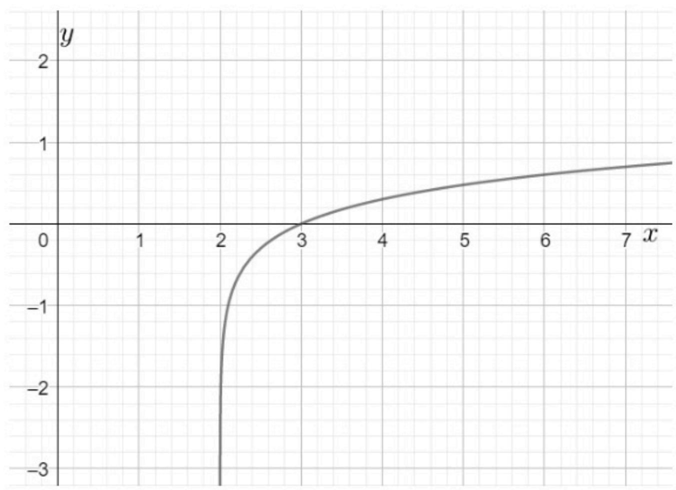
Actividad 5
Realiza las actividades **1, 2, 3, 4, 5 y 6** de las páginas 20 y 21 del ***cuaderno de actividades*** del estudiante**.**

Recuerda comprobar tus respuestas en el **solucionario** de la página 53 del ***cuaderno de actividades*** del estudiante.

Cierre

Evaluación
Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta

1 **¿Cuál es el dominio y recorrido de la función que se muestra en la siguiente gráfica?**



a) *Dom f*: $\mathbb{R}$ y *Rec f*: $\mathbb{R}$
b) *Dom f*: $\mathbb{R}^+$ y *Rec f*: $\mathbb{R}$
c) *Dom f*: $\mathbb{R} - \{2\}$ y *Rec f*: $\mathbb{R}^+$
d) *Dom f*: $x \in \mathbb{R}: x > 2$ y *Rec f*: $\mathbb{R}$
e) *Dom f*: $\mathbb{R}$ y *Rec f*: $x \in \mathbb{R}: x > 2$

2 Aplicar el modelo que relaciona el área de la superficie corporal de una persona, su masa y su estatura. La relación entre el área de la superficie corporal a (m^2) de una persona, su masa m (kg) y su estatura h (cm) está dada por la expresión:

$$\log(a) = -2{,}144 + 0{,}425 \cdot \log(m) + 0{,}725 \cdot \log(h)$$

Si una persona tiene una estatura de h = 157 cm y una masa de m = 65 kg, ¿qué superficie corporal a (m^2) aproximadamente tendrá?

a) 0,103 m^2
b) 0,21 m^2
c) 1,32 m^2
d) 2,96 m^2
e) 4,5 m^2

3 ¿Cuáles son los puntos de intersección de la función $f(x) = \log(2x + 5)$? ?

a) (0,69 ; –2) y (2 ; 0,69)
b) (–2 ,0) y (0,69 ; 0)
c) (0 , –2) y (0 ; 0,69)
d) (0 , –2) y (0,69 ; 0)
e) (–2 ,0) y (0 ; 0,69)

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ___________________________________.

3º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad

2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Lección 4

Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Función logarítmica

Objetivo: Aplicar modelos matemáticos de funciones logarítmicas y también representar gráficamente dichas funciones.

¿Cómo se define un logaritmo? Explica con un ejemplo.

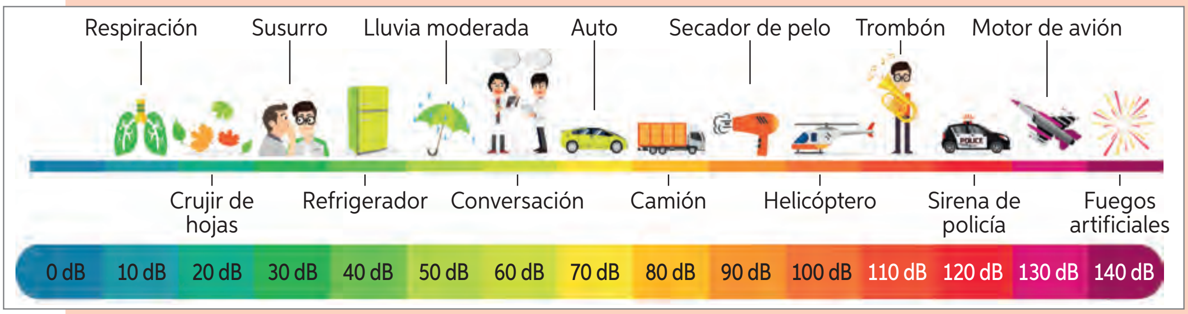
¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos que estudiaste en cursos anteriores?

Acústica

1. Lee la siguiente información. Luego, responde.

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m^2). La menor intensidad que puede captar el oído humano, llamado **umbral de audición**, es 10^{-12} W/m^2. A partir de 1 W/m^2, comienza el **umbral del dolor** en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función:

$\beta(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde β es el nivel de intensidad sonora medido en decibeles (dB), I es la intensidad del sonido en W/m^2 e I_0 es el umbral de audición (10^{-12} W/m^2).



a. Calcula el nivel de intensidad sonora (en decibeles) del umbral del dolor. Guíate por el siguiente ejemplo del umbral de audición.

$$\beta(10^{-12}) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta(10^{-12}) = 10\log 1$$

$$\beta(10^{-12}) = 0$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora del umbral de audición es 0 dB.

b. Escoge 3 situaciones de las que aparezcan en la imagen y calcula la intensidad de sonido (W/m^2) de cada una. Observa el ejemplo para el refrigerador (40 dB).

$$40 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$4 = \log I - \log(10^{-12})$$

Se aplican propiedades de logaritmo.

$$4 = \log I + 12\log 10$$

$$4 = \log I + 12$$

Se aplica la definición de logaritmo.

$$-8 = \log I \rightarrow I = 10^{-8}\ W/m^2$$

c. En general, se recomienda que, al usar audífonos, no se superen los 80 dB. Sin embargo, muchas personas los utilizan cerca de los 100 dB.

- ¿Cuál es la intensidad del sonido de estas magnitudes?
- ¿Cuántas veces mayor es la intensidad de los 100 dB que la recomendada?

2. Aplica el modelo matemático anterior para conocer el nivel de intensidad sonora (en decibeles) de los siguientes fenómenos:


Discoteca: 10^{-1} W/m^2


Tren en túnel: 10^{-3} W/m^2


Bomba de Hiroshima: 10^{8} W/m^2


Tráfico intenso: 10^{-4} W/m^2


Biblioteca: 10^{-10} W/m^2


Aspiradora: 10^{-5} W/m^2

- Si se sabe que un equipo de sonido tiene una intensidad igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en decibeles?
- ¿A qué volumen escuchas música? ¿Te has informado de los cuidados que debes tener para no dañar tus oídos?

3. Representa la función $f(x) = \log_2 x$. Para ello, realiza lo pedido.
   a. Elabora una tabla de valores y grafica la función en el plano cartesiano.
   b. A partir de la gráfica, responde:
      - ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?
      - ¿En qué punto la gráfica se interseca con el eje X?
      - ¿La gráfica interseca el eje Y?
      - ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando aumenta el valor de x? ¿Es una función creciente o decreciente?

Recuerda que, para una potencia $y = a^x$, se define el logaritmo $x = \log_a y$. Por ejemplo:

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow 4 = \log_2 16$$

Se define **función logarítmica** como la función de la forma:

$$f(x) = \log_a x, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1.$$

En ella se tiene que:

- Su **dominio** es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- Su **recorrido** es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- La gráfica **interseca** el **eje X** en el punto **(1, 0)** y no interseca el eje Y, que actúa como asíntota de la gráfica.

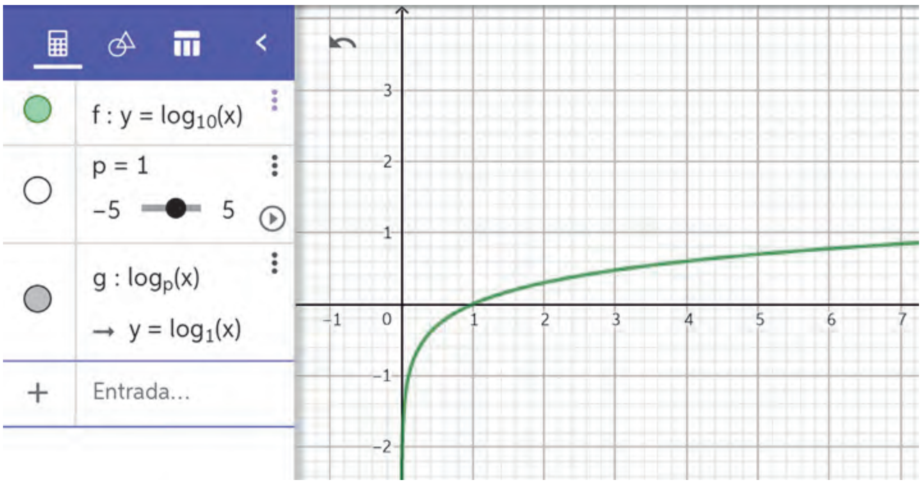
Existen varios fenómenos o situaciones de la naturaleza que son modelados mediante una función logarítmica. Por ejemplo: la intensidad del sonido, la magnitud de un sismo, la escala del pH, entre otros.

TIC

4. En parejas, utilicen la versión online del *software* GeoGebra y sigan los pasos.

Paso 1: Escriban en la celda Entrada la función $y = \lg(x)$. Luego, presionen Enter.

Paso 2: Construyan la gráfica de $y = \log_p x$. Para ello, inserten un deslizador p escribiendo en la celda Entrada $y = \log(p, x)$. Luego, presionen Enter y muevan el deslizador para que tome distintos valores. Deben obtener la gráfica que se muestra a continuación:



a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función?

b. ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

c. ¿Qué ocurre con la gráfica de la función cuando p toma valores cada vez mayores?

d. Describan lo que ocurre con la gráfica de la función cuando p toma valores entre 0 y 1. ¿Por qué se produce esto?

e. ¿Puede tomar p valores negativos? Justifiquen su respuesta.

Paso 3: Inserten un deslizador b, escribiendo en la celda Entrada $y = \lg(x) + b$. Presionen Enter y muevan el deslizador.

a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

b. Describan lo que ocurre con la gráfica de la función cuando b toma valores cada vez mayores.

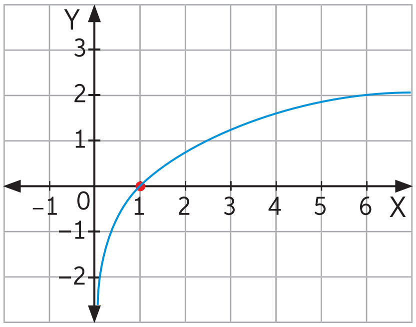
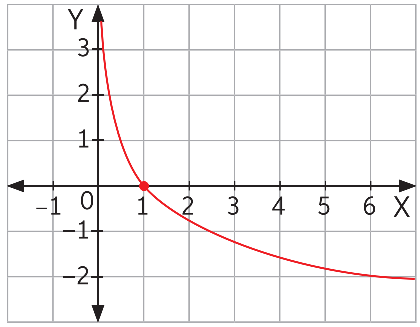
c. ¿Puede b tomar valores negativos? Justifiquen y describan lo que ocurre.

Paso 4: Inserten un deslizador c, escribiendo en la celda Entrada $y = \lg(x - c)$. Presionen Enter y muevan el deslizador.

a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

b. Describe lo que ocurre con la gráfica de la función cuando c toma distintos valores.

La **gráfica** de una función logarítmica de la forma $f(x) = log_a x$ depende del valor de a. Así:

Si $a > 1$	Si $0 < a < 1$
	
La función es **creciente**.	La función es **decreciente**.

Además, mientras mayor es el valor de a, la función tiene un **mayor crecimiento**.

La gráfica de $y = \log_a x + b$ es una **traslación vertical** de b unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia arriba** si $b > 0$ y **hacia abajo** si $b < 0$.

La gráfica de $y = \log_a (x - c)$ es una **traslación horizontal** de c unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia la derecha** si $c > 0$ y **hacia la izquierda** si $c < 0$.

¿Cómo sería la gráfica de la función $f(x) = -\log x$? Comenta con tu curso.

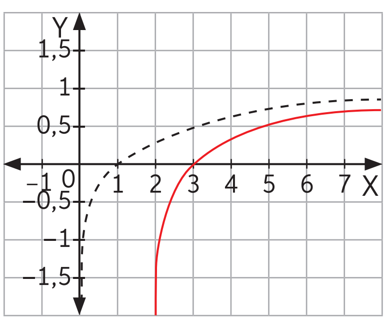
5. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones logarítmicas. Guíate por el ejemplo.

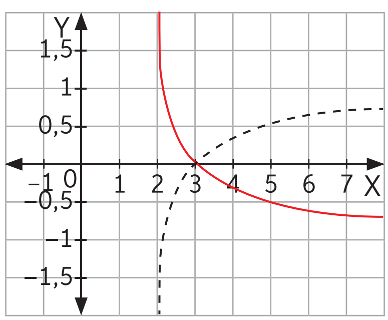
$f(x) = 1 - \log(x - 2)$

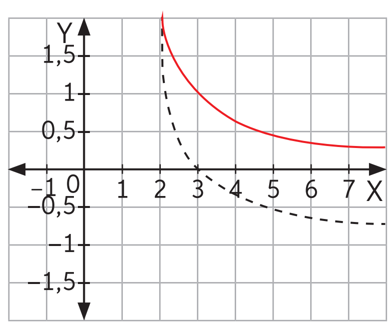
Se grafica $y = \log x$ y se traslada 2 unidades a la derecha para obtener $y = \log(x - 2)$.

Se refleja respecto del eje X para obtener $y = -\log(x - 2)$.

Se traslada verticalmente una unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \log(x - 2)$.







a. $f(x) = 1 - \log x$ b. $g(x) = 2\log(x) + 3$ c. $h(x) = \log(x + 1) - 1$

6. Escribe el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad 5.

7. Determina los puntos de intersección con los ejes de las gráficas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log(x + 10)$ b. $g(x) = \log(-x + 5)$ c. $h(x) = 2 + \log_2 (x - 2)$

Actividad de aplicación · Logaritmos en la astronomía

¿Qué haremos? Determinar la magnitud aparente de algunos objetos celestes.

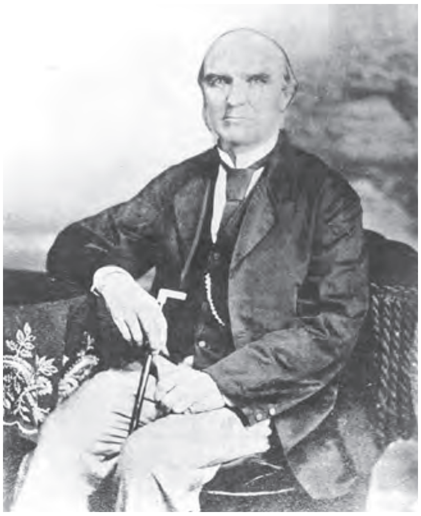
La magnitud aparente mide el brillo de un objeto celeste tal y como es observado por una persona en la Tierra.

En el siglo XIX se clasificaron las estrellas en primera y segunda magnitud según su brillo. Fue el astrónomo inglés Norman Pogson quien descubrió que una estrella de primera magnitud es 100 veces más brillante que una de sexta magnitud.

La expresión que determinó Pogson para la magnitud aparente de las estrellas está dada por:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right),$$

Donde m es la magnitud aparente entre las estrellas y $\frac{b_1}{b_2}$ es la relación de su brillo.


Norman Pogson

Planifiquemos

Paso 1: En parejas, investiguen la magnitud de al menos 6 objetos celestes, entre ellos pueden ser los que se muestran a continuación:


Sirio


Saturno


Canopus

Paso 2: Determinen cuántas veces más brillante es el Sol que los distintos objetos celestes. Para ello, reemplacen los valores de las magnitudes en la fórmula y dejen expresado $\frac{b_1}{b_2}$. Luego, confeccionen una tabla para ordenar la información obtenida.

Presentemos y concluyamos

Paso 3: Usando las redes sociales, presenten de forma creativa los resultados y las conclusiones que obtuvieron a partir del trabajo realizado.

20 a 22

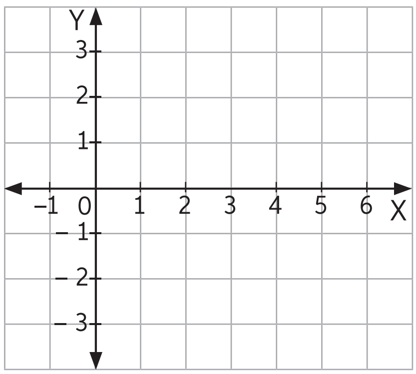
Para concluir

a. ¿Cómo se define una función logarítmica? Explica con un ejemplo.
b. ¿Cómo es la gráfica de una función logarítmica? Describe sus características.
c. ¿Cómo se diferencian gráficamente la función exponencial y logarítmica?
d. De lo estudiado en este tema, ¿qué crees que necesitas reforzar?

Función logarítmica

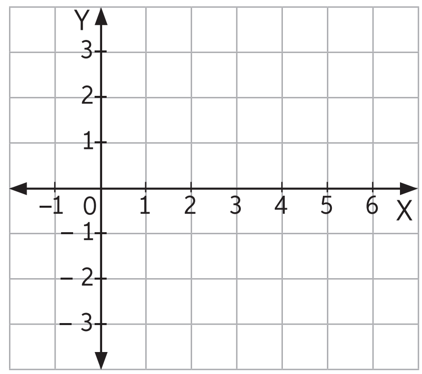
1. Representa en el plano cartesiano las siguientes funciones e indica si son crecientes o decrecientes.

a. $f(x) = \log_3 x$



Función: ______________________

b. $g(x) = \log_{0,5} x$



Función: ______________________

2. Determina, sin graficar, el dominio y el recorrido de las siguientes funciones logarítmicas.

a. $f(x) = \log_2(x + 3)$

b. $f(x) = 2 + \log_2 x$

3. Determina los puntos de intersección con los ejes de las siguientes funciones logarítmicas.

a. $f(x) = \log(x + 6)$

b. $h(x) = \log_3(x + 9) - 1$

c. $g(x) = \log(x - 5)$

d. $j(x) = \log_{\frac{1}{4}}(-x + 4)$

4. Evalúa si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

a. ________ Una función logarítmica f no puede tener valores negativos en su recorrido.

____

b. ________ Si $a > b$, entonces $\log_a x > \log_b x$.

____

c. ________ El dominio de una función logarítmica es siempre el conjunto de los números reales.

____

d. ________ Si $f(x) = 1 + \log(x)$, la gráfica de la función $g(x) = \log(x) - 3$ corresponde a la gráfica de $f(x)$ trasladada 4 unidades horizontalmente hacia los negativos.

____

5. Determina qué condición debe cumplir a, en cada caso, para que las siguientes funciones sean decrecientes o crecientes.

a. $f(x) = \log_{(a+1)} x$

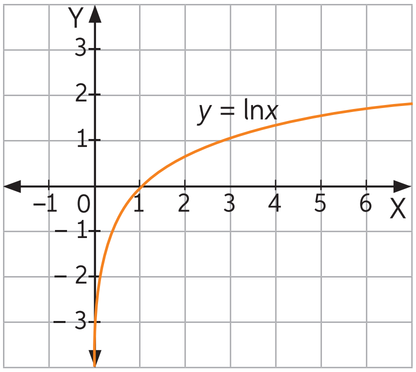
b. $g(x) = \log_{(6a+5)} x$

c. $h(x) = \log_{(-3a)} x$

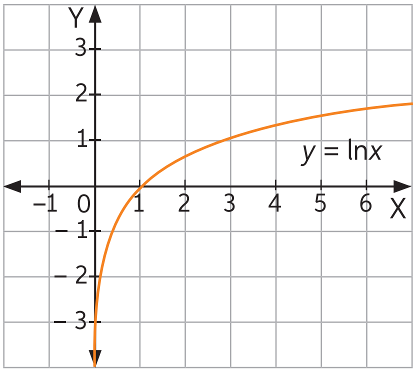
d. $j(x) = \log_{(6-3a)} x$

6. Construye la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas considerando el gráfico de $y = \ln x$.

a. $f(x) = \ln(x - 2) + 1$



b. $g(x) = -\ln(x) + 1$

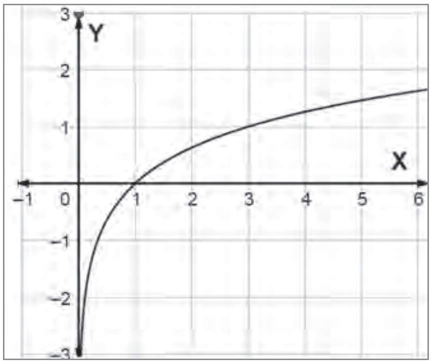


Lección 4 Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Página 20 Función logarítmica

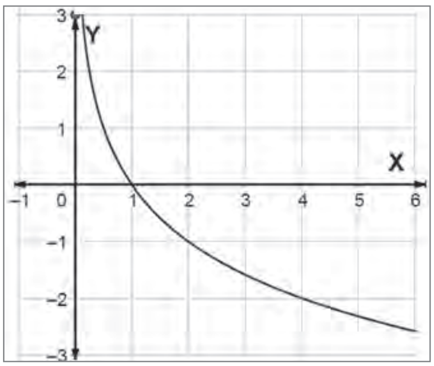
1.

a.



Función: creciente.

b.



Función: decreciente.

2.

a. El dominio es $x \in \mathbb{R}$: $x > -3$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

b. El dominio es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

3.

a. (–5, 0) y (0; 0,77).

b. (–6, 0) y (0, 1).

c. (6, 0)

d. (3, 0) y (0, –1).

Página 21

4.

a. F. Sí, puede tener valores negativos en el recorrido.

b. V.

c. F. Porque el dominio siempre es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$

d. F. Se traslada 4 unidades hacia los negativos respecto del eje Y (hacia abajo).

5.

a. Para que f sea creciente: $a > 0$ y para que sea decreciente: $-1 < a < 0$.

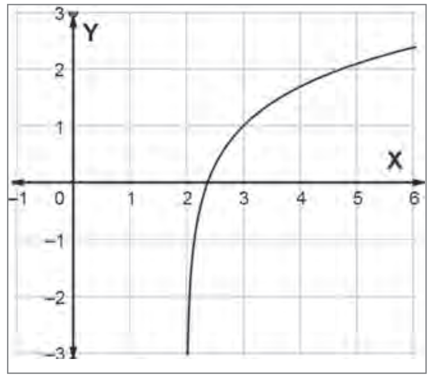
b. Para que g sea creciente: $a > -\frac{2}{3}$ y para que sea decreciente: $-\frac{2}{3} > a > -\frac{5}{6}$.

c. Para que h sea creciente: $a < -\frac{1}{3}$ y para que sea decreciente $-\frac{1}{3} < a < 0$.

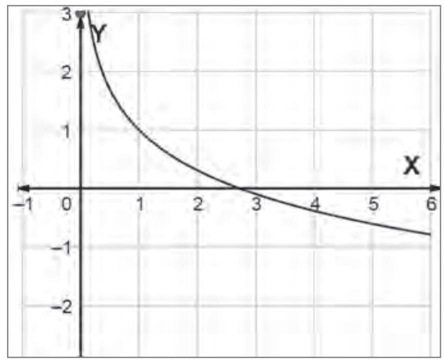
d. Para que j sea creciente: $a < \frac{5}{3}$ y para que sea decreciente $\frac{5}{3} < a < 2$.

6.

a.



b.



Página 23 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

1.

a. $f^{-1}(x) = 3^x$

x	$f^{-1}(x)$
–2	$\frac{1}{9}$
–1	$\frac{1}{3}$
–0,5	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	1
0,3	1,39
0,5	1,73
1	3
2	9