3º medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 34

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

En esta clase comprenderás la **relación que existe entre las funciones exponencial y logarítmica**, a través del análisis de su gráfica y estructura algebraica.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

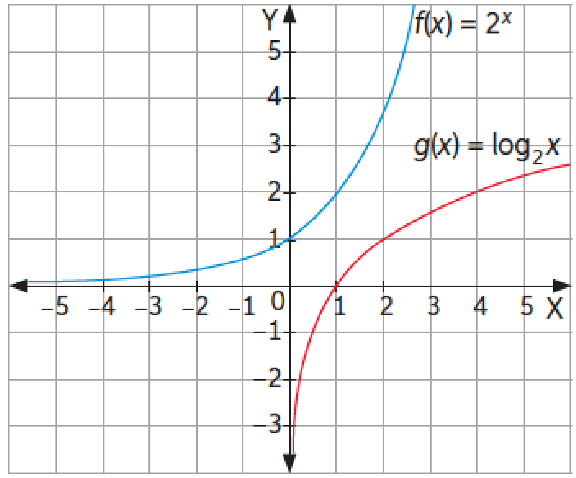
Escribe en tu cuaderno la situación que se detalla en la página 49 del **Texto del Estudiante** junto con su desarrollo.

Ricardo y Ariela realizan la tarea que les dio la profesora de Matemática. Deben analizar dos funciones: una exponencial $f(x) = 2^x$ y otra logarítmica $g(x) = \log_2 x$.

a. Observa las tablas de valores de cada función y sus gráficas respectivas.

x	$f(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

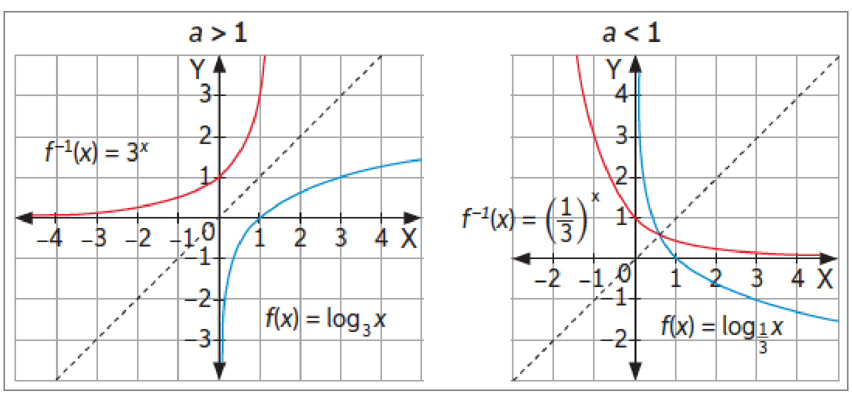
x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



Observando los valores de cada tabla debes haber notado que estos se repiten, pero en distintas columnas, y que sus gráficas son una reflexión de una de ellas con respecto de la otra. El dominio de una de ellas es el recorrido de la otra y viceversa.

Escribe en tu cuaderno y analiza la relación que existe entre la función logarítmica y exponencial del cuadro explicativo de la página 50 del **Texto del Estudiante.**

La **función logarítmica** $f(x) = \log_a x$ es la **función inversa** de la función exponencial $f^{-1}(x) = a^x$. Las gráficas de estas funciones que tienen la misma base son **simétricas** respecto de la recta $y = x$.



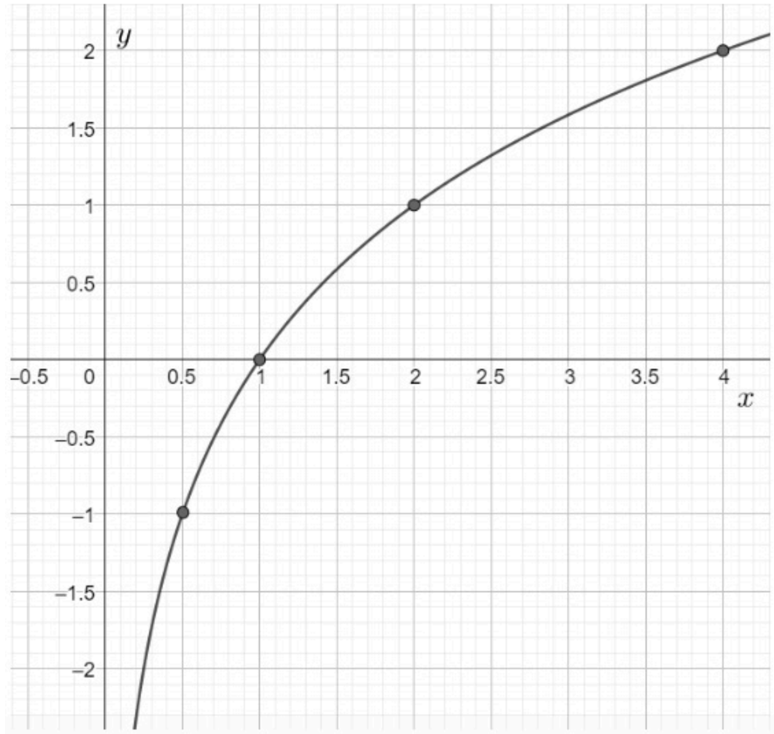
Recuerda que si f^{-1} es la función inversa de f, se cumple que

$f: A \rightarrow B \Rightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$.

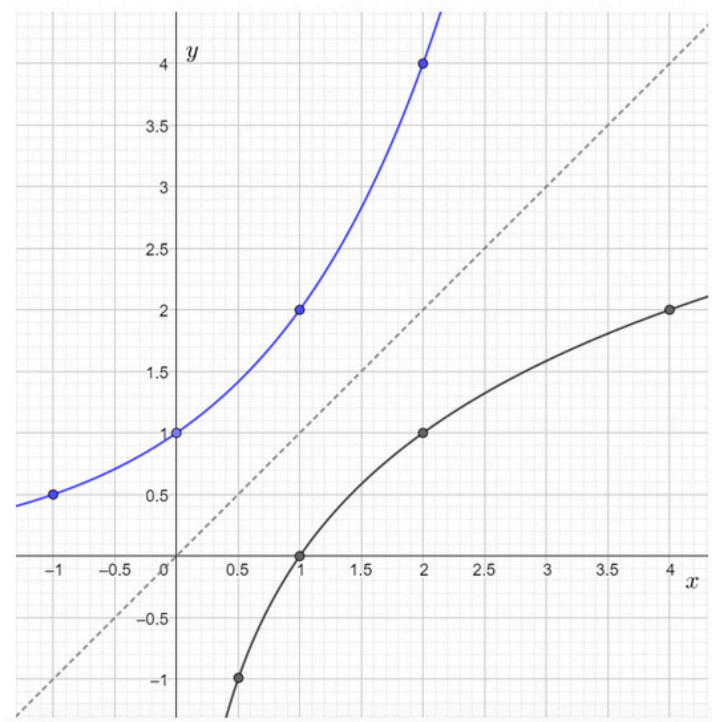
Recuerda que para graficar una función logarítmica en el plano cartesiano debes identificar los puntos de intersección, analizar la base y traslaciones que tenga la función, para luego completar la gráfica de forma aproximada, y si es necesario puedes comprobar graficando en un software como GeoGebra.
Ejemplo la función $f(x) = \log_2 x$ del ejercicio 2 de la página 50 tiene la siguiente gráfica:

Puntos de intersección.	***Análisis de la base.***	***Traslaciones de la gráfica.***
$f(0) = \log_2 x$ = no tiene solución Esto indica que la gráfica no intersecta al Eje y, es decir que este Eje es su asíntota. $f(x) = \log_2 x = 0$ $\log_2 x = 0$ $2^0 = x$ $1 = x$ La gráfica interseca al Eje x en el punto (1,0)	$f(x) = \log_2 x$ La base es 2 que es mayor a 1, por lo cual la gráfica es creciente.	No tiene traslaciones verticales ni horizontales, al no tener la forma de: $f(x) = \log_2(x - c)$ $f(x) = \log_2 x + b$ Vistas en la case 33.
Puntos de referencia para graficar		
$f(x) = \log_2 x = 1$ $\log_2 x = 1$ $2^1 = x$ $2 = x$ Es decir, la gráfica pasa por el punto (2,1)	$f(x) = \log_2 x = -1$ $\log_2 x = -1$ $2^{-1} = x$ $\frac{1}{2} = x$ Es decir, la gráfica pasa por el punto ($\frac{1}{2}$,–1)	$(x) = \log_2 x = 2$ $\log_2 x = 2$ $2^2 = x$ $4 = x$ Es decir, la gráfica pasa por el punto (4,2) También es posible encontrar este punto al buscar el valor de $f(x)$, cuando x = 4.

Gráfica



La gráfica de la inversa debe ser una simétrica con respecto a la recta y = x, puedes apoyarte dibujando los puntos (0,1); (1,2); (–1, $\frac{1}{2}$) y (2,4) que corresponderían a los simétricos que se encontraron anteriormente.



Puedes comprobar este resultado en el **solucionario de tu Texto del Estudiante** página 227.

Actividad 1
Completa la actividad 2 de la página 50 del **Texto del Estudiante.**
Recuerda revisar tus respuestas en la página 227 del **solucionario del Texto del Estudiante.**

Para encontrar la función inversa de una dada, por ejemplo $f(x) = 3^x$, de forma algebraica se debe realizar el siguiente procedimiento:

$$y = 3^3 \qquad /\log_3$$
$$\log_3 y = \log_3 3^x$$
$$\log_3 y = x$$
$$\log_3 x = y \quad \rightarrow \quad f^{1}(x) = \log_3 x$$

Actividad 2
Ayudándote del ejemplo dado realiza la **actividad 3** de la página 50 del **Texto del Estudiante.** Recuerda revisar tus respuestas en la página 227 del solucionario del **Texto del Estudiante.**

Actividad 3
Realiza las **actividades 1, 2 y 3** de las páginas 23 y 24 del ***cuaderno de actividades del estudiante.***

Recuerda revisar tus respuestas en la página 53 y 54 del s**olucionario del *cuaderno de actividades del estudiante.***

Cierre

Evaluación de la clase
Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

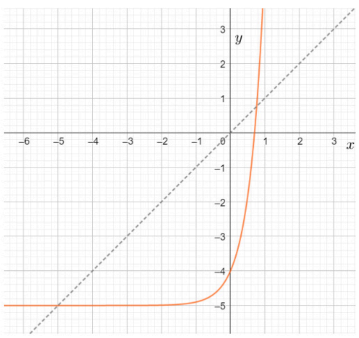
1 **Si la gráfica de la función $f(x) = \log(x + 3)$pasa por el punto (–2,0), entonces la gráfica de su función inversa pasa por el punto:**

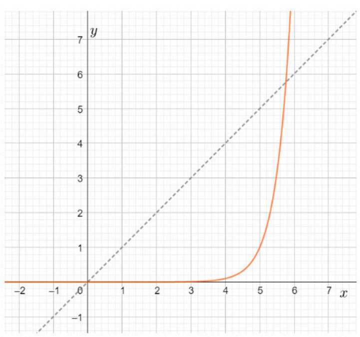
a) (2,0)
b) (0,2)
c) (–2,0)
d) (0, –2)
e) (–2, –2)

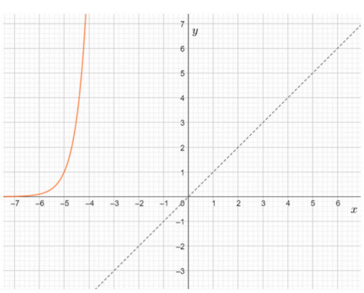
2 **¿Cuál es la función inversa de la función $f(x) = \log(x + 3)$?**

a) $f^{-1}(x) = (10 - x)^3$
b) $f^{-1}(x) = 10^x - 3$
c) $f^{-1}(x) = 10^{x+3}$
d) $f^{-1}(x) = 10x^{x-3}$
e) $f^{-1}(x) = 10x^3$

3 **¿Cuál de los siguientes gráficos muestra de forma correcta la función $g(x) = \log(x - 5)$ y su inversa?**

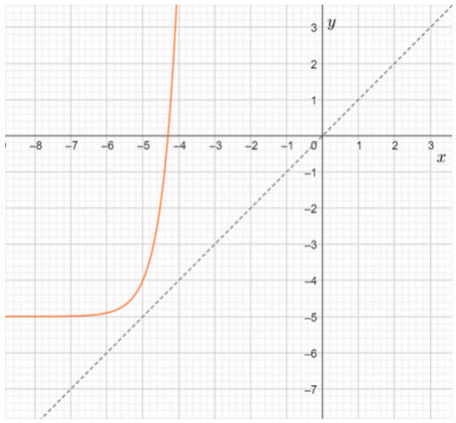
a) 

b) 

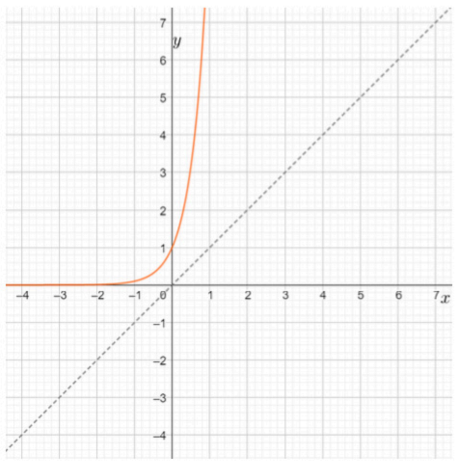
c) 

3

d)



e)



Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ____________________________________.

3º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Objetivo: Comprender la relación que existe entre las funciones exponencial y logarítmica.

¿Cómo resuelves $2^x = 128$? Explica tu estrategia.

¿Qué estrategia usas para graficar una función exponencial?, ¿y una logarítmica?

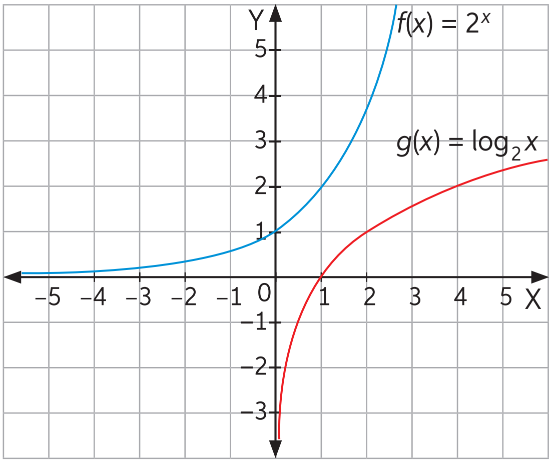
1. Lee la situación. Luego, realiza lo pedido.

Ricardo y Ariela realizan la tarea que les dio la profesora de Matemática. Deben analizar dos funciones: una exponencial $f(x) = 2^x$ y otra logarítmica $g(x) = \log_2 x$.

a. Observa las tablas de valores de cada función y sus gráficas respectivas.

x	$f(x) = 2^x$
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2



b. Identifica la gráfica correspondiente a cada función.

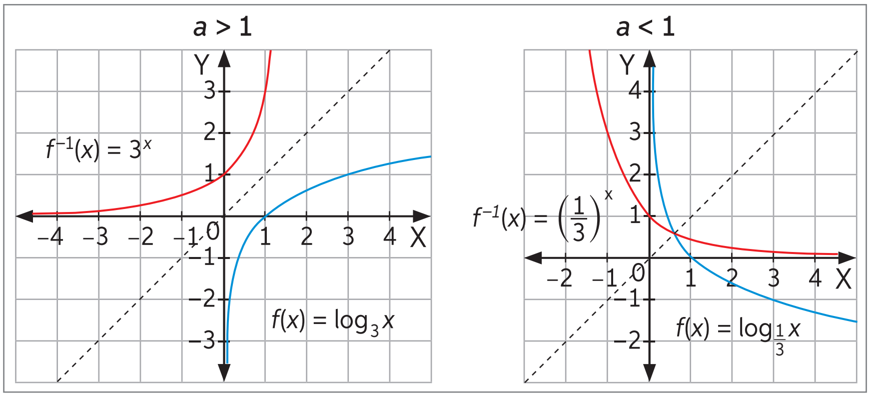
c. Fíjate en los valores asignados a las columnas de cada tabla. ¿Qué observas?

d. ¿Cuáles son las intersecciones de las gráficas con los ejes?

e. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de ambas funciones? ¿Cómo puedes explicar esta relación? Comenta con tu curso.

¿Existe simetría entre las gráficas de las funciones?

La **función logarítmica** $f(x) = \log_a x$ es la **función inversa** de la función exponencial $f^{-1}(x) = a^x$. Las gráficas de estas funciones que tienen la misma base son **simétricas** respecto de la recta $y = x$.



Recuerda que si f^{-1} es la función inversa de f, se cumple que

$f: A \longrightarrow B \Rightarrow f^{-1}: B \longrightarrow A$.

2. Representa en el plano cartesiano cada función logarítmica y su inversa.
   a. $f(x) = \log_2 x$ b. $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ c. $g(x) = \log x$

Verifica los gráficos construidos usando una herramienta tecnológica como GeoGebra.

3. Determina algebraicamente la función inversa de las siguientes funciones exponenciales. Observa el ejemplo para $f(x) = 3^x$.

$$y = 3^x \qquad / \log_3$$
$$\log_3 y = \log_3 3^x$$
$$\log_3 y = x$$
$$\log_3 x = y \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_3 x$$

   a. $f(x) = 4^x$ b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c. $f(x) = e^x$

Sismología

4. Aplica el modelo que se mencionó en el inicio de Unidad (página 33) y calcula:
   a. La energía liberada (*E*) en los terremotos de Valdivia (1960) y en el de 2010.
   b. La magnitud (*M*) en los terremotos de Algarrobo y Vallenar:

Algarrobo (1985): $3{,}16 \cdot 10^{23}$ ergios

Vallenar (2013): $1{,}9 \cdot 10^{22}$ ergios

Terremoto de Chile 2010.

Para concluir

a. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Valdivia (1960) que el de 2010?

b. Explica a un compañero cuál es la relación algebraica y gráfica que existe entre la función exponencial y la logarítmica.

c. ¿Cómo se relacionan los dominios y recorridos de las funciones exponencial y logarítmica?

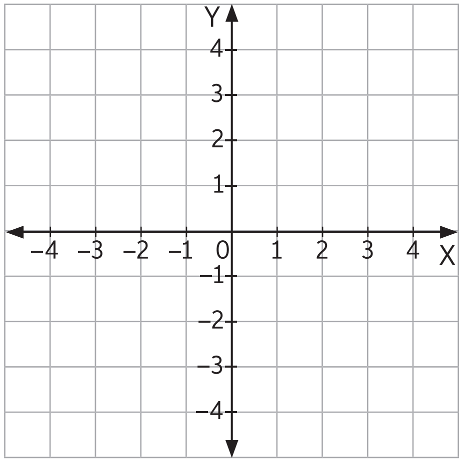
23 y 24

Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

1. Representa las siguientes funciones logarítmicas y sus funciones inversas.

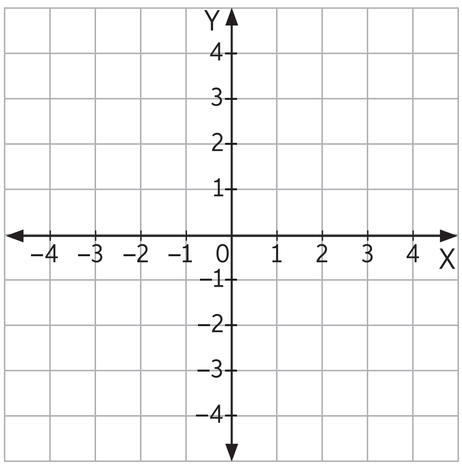
a. $f(x) = \log_3 x \rightarrow f^{-1}(x) =$ ______

x	$f^{-1}(x)$
–2	
–1	
–0,5	
0	
0,3	
0,5	
1	
2	



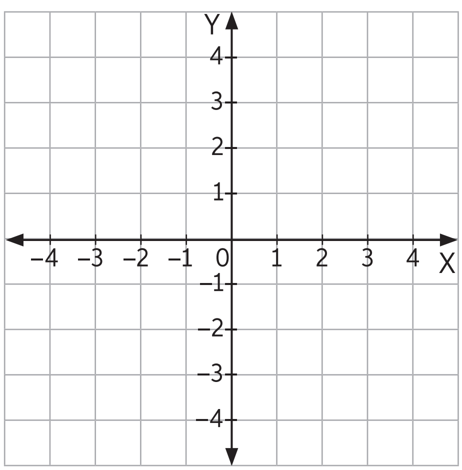
b. $g(x) = \log_{1,4} x \rightarrow g^{-1}(x) =$ ______

x	$g^{-1}(x)$
–2	
–0,5	
0	
0,3	
0,6	
1	
1,5	
2	



c. $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow h^{-1}(x) =$ ______

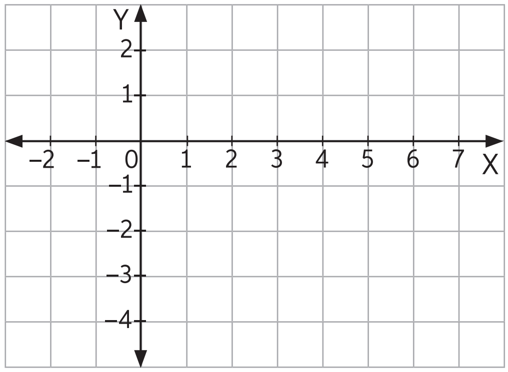
x	$h^{-1}(x)$
–2	
–1	
–0,3	
0	
0,5	
1	
2	



Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Grafica la función $g(x) = \log(x + 1) - 2$. Luego, responde.



a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido?

b. ¿Es una función creciente o decreciente?, ¿por qué?

2. Resuelve los problemas. Utiliza calculadora si es necesario.

a. Al momento de morir, un organismo contiene 50 mg de átomos de carbono 14. La cantidad C(x) de carbono 14 que queda en el organismo *x* años después se ajusta al modelo: $C(x) = 50 \cdot e^{-0{,}000119x}$. ¿Después de cuánto tiempo de la fecha de muerte del organismo le quedará 0,8 mg de carbono 14?

b. El número de habitantes en millones de cierta ciudad se puede calcular utilizando la expresión $P(t) = 2^3 \cdot 10^{\frac{2t}{3}}$. Si *t* representa el tiempo en años, ¿cuánto tiempo aproximado debe transcurrir para que la población de la ciudad sea de 200 millones de habitantes?

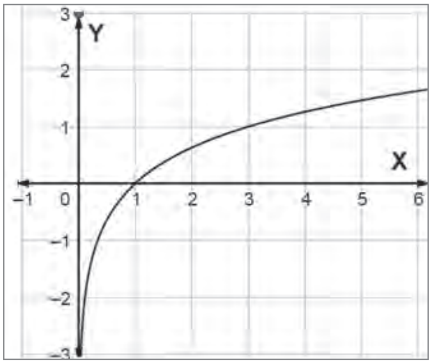
c. ¿Cuál es la relación que hay entre los logaritmos y los problemas que resolviste anteriormente? Explica.

Lección 4 Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Página 20 Función logarítmica

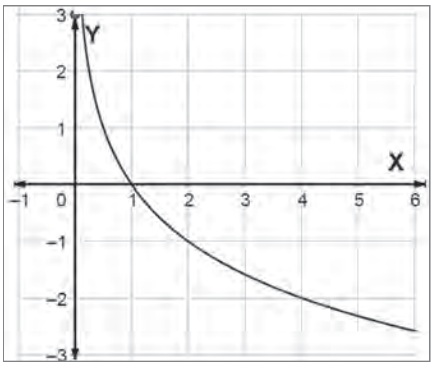
1.

a.



Función: creciente.

b.



Función: decreciente.

2.

a. El dominio es $x \in \mathbb{R}$: $x > -3$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

b. El dominio es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

3.

a. (–5, 0) y (0; 0,77).

b. (–6, 0) y (0, 1).

c. (6, 0)

d. (3, 0) y (0, –1).

Página 21

4.

a. F. Sí, puede tener valores negativos en el recorrido.

b. V.

c. F. Porque el dominio siempre es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$

d. F. Se traslada 4 unidades hacia los negativos respecto del eje Y (hacia abajo).

5.

a. Para que f sea creciente: $a > 0$ y para que sea decreciente: $-1 < a < 0$.

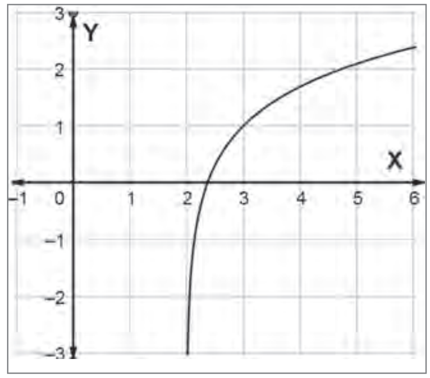
b. Para que g sea creciente: $a > -\frac{2}{3}$ y para que sea decreciente: $-\frac{2}{3} > a > -\frac{5}{6}$.

c. Para que h sea creciente: $a < -\frac{1}{3}$ y para que sea decreciente $-\frac{1}{3} < a < 0$.

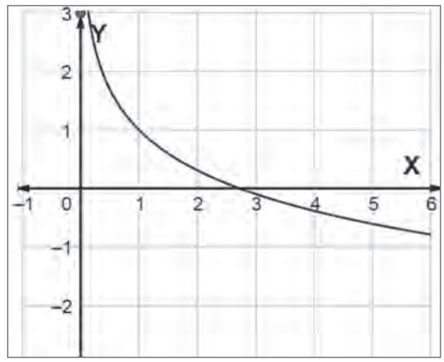
d. Para que j sea creciente: $a < \frac{5}{3}$ y para que sea decreciente $\frac{5}{3} < a < 2$.

6.

a.



b.

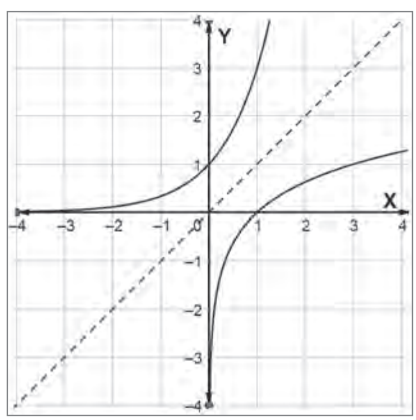


Página 23 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

1.

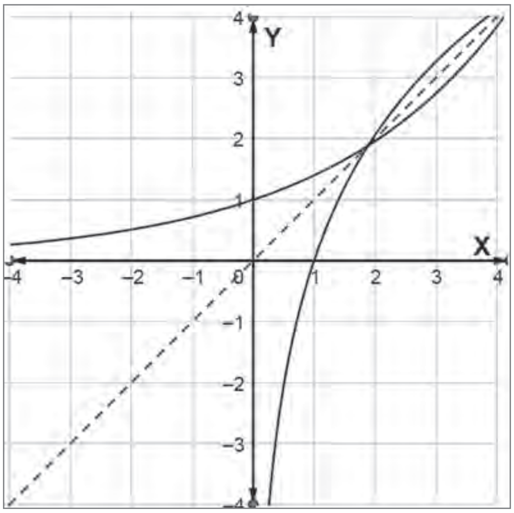
a. $f^{-1}(x) = 3^x$

x	$f^{-1}(x)$
–2	$\frac{1}{9}$
–1	$\frac{1}{3}$
–0,5	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	1
0,3	1,39
0,5	1,73
1	3
2	9



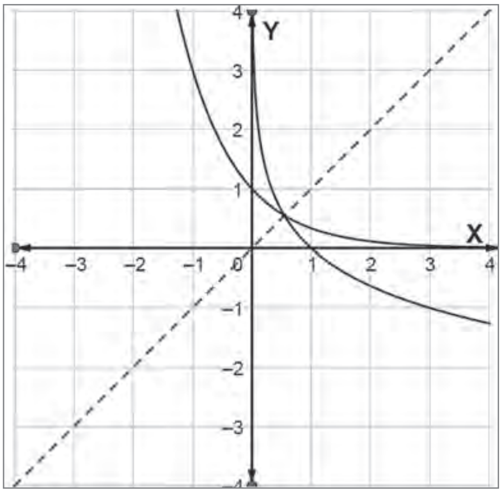
b. $g^{-1}(x) = 1{,}4^x$

x	$g^{-1}(x)$
−2	0,51
−0,5	0,84
0	1
0,3	1,1
0,6	1,22
1	1,4
1,5	1,65
2	1,96



c. $h^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$h^{-1}(x)$
−2	9
−1	3
−0,3	1,39
0	1
0,5	0,577
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



Página 24

2.

a. $f^{-1}(x) = \log_4 x$ **b.** $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

3.

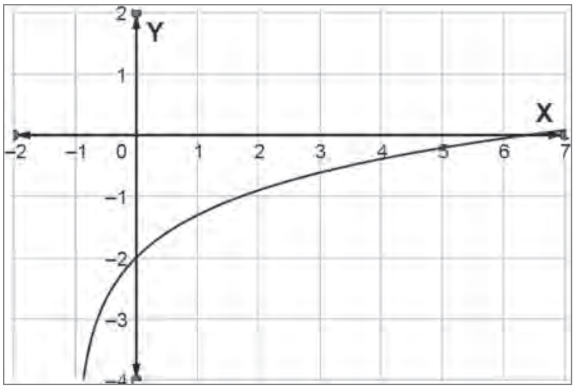
a. Primero, se puede multiplicar la expresión por −1, quedando $-\text{pH} = \log[H^+]$ y luego se utiliza la definición de logaritmo, por lo que la cantidad de iones de hidrógeno se determina $[H^+] = 10^{-\text{pH}}$.

b. $[H^+] \approx 0{,}0199$

a. La definición de logaritmo, donde $\log_b a = x$ equivale a $b^x = a$.

Página 25 Antes de continuar

1.



a. El dominio es $x \in \mathbb{R}: x > -1$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

b. Es una función creciente, porque a medida que x aumenta, $f(x)$ también aumenta.

2.

a. 34 479 años. **b.** 2,09 años.

c. Para encontrar la respuesta a los problemas es posible calcular la función inversa y luego reemplazar los valores de acuerdo al problema y obtener la respuesta buscada.

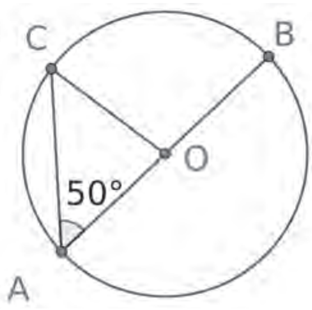
UNIDAD 3

Lección 5: Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

Página 26 Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia

1.

a. Figura variable, por ejemplo:



$m(\widehat{BC}) = m(\sphericalangle OAC) = x = 100°$