2º medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 35

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

El objetivo de esta clase es resolver, algebraicamente, ecuaciones cuadráticas mediante el método de completación cuadrado perfecto.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

Recuerda que una ecuación cuadrática toma la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como, $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$ así que las soluciones son $x_1 = -\sqrt{c}$ y $x_2 = \sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$. En resumen podemos decir que:

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x_1 = \sqrt{c}$ y $x_2 = -\sqrt{c}$

Ejemplo:

$x^2 - 12 = 0$ $x^2 = 12$ $x = \pm\sqrt{12}$ Luego sus soluciones son : $x_1 = \sqrt{12}$ y $x_2 = -\sqrt{12}$	$(x + 2)^2 - 10 = 0$ $(x + 2)^2 = 10$ $x+2 = \pm\sqrt{10}$ $x = -2 \pm \sqrt{10}$ Las soluciones son $x_1 = -2 + \sqrt{10}$ y $x_2 = -2 - \sqrt{10}$

Como vimos en el ejemplo anterior, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm b)^2 = c$, entonces la podemos resolver obteniendo la raíz cuadrada de cada miembro. En una ecuación de esta forma, el primer miembro es un cuadrado perfecto.

Actividad 1
Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas siguiendo los ejemplos anteriores.

A. $x^2 - 49 = 0$

B. $(x - 7)^2 - 10 = 0$

Completar el cuadrado

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, a la expresión se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Con esto formamos el cuadrado perfecto, es decir:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo: Factoricemos la expresión para que sea un cuadrado perfecto, completando el cuadrado:

- $x^2 + 10x$ $\quad\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$

  $x^2 + 10x + (5)^2 = (x + 5)^2$

- $x^2 - 6x$ $\quad\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$

  $x^2 - 6x + (-3)^2 = (x - 3)^2$

Actividad 2
Realiza el **ejercicio 1** de "¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado perfecto?" del **Texto del Estudiante** de la página 49.

Una ecuación cuadrática que no sea posible factorizar con facilidad, entonces la podemos resolver aplicando la técnica de completar el cuadrado. Para esto sumamos una constante a una expresión para hacerla un cuadrado perfecto.

Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado perfecto

Para hacer que $x^2 + bx = c$ el lado izquierdo sea un cuadrado perfecto, a ambos lados de la ecuación se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Con esto formamos el cuadrado perfecto, es decir: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, luego resolvemos.

Ejemplo: Resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 - 8x + 7 = 0$ completando cuadrado:

$x^2 - 8x + 8 = 0$	/ Ecuación dada
$x^2 - 8x = -8$	/ Restamos 7 a ambos lados
$x^2 - 8x + 16 = -8 + 16$	/ Completamos cuadrado $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = (-\mathbf{4^2}) = 16$
$(x - \mathbf{4})^2 = 8$	/ Obtención de raíz cuadrada
$x - 4 = \pm\sqrt{8}$	
$x = 4 \pm 2\sqrt{2}$	

Las soluciones son $x_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ = y $x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

Ejemplo:
Resolvamos la ecuación cuadrática $3x^2 - 2x - 5 = 0$ completando cuadrado, dado que el coeficiente $a \neq 1$

$3x^2 - 2x - 5 = 0$	/ Ecuación dada
$3x^2 - 2x - 5 = 0$	/ Multiplicar por $\frac{1}{3}$, dado que $a \neq 1$
$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$	/ Sumamos $\frac{5}{3}$ a ambos lados
$x^2 - \frac{2}{3}x = 0$	/ Complementamos cuadrado $\left(\frac{\frac{-2}{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{5}{3} + \frac{1}{9}$	/ Factorizamos y realizamos suma
$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$	/ Obtención de raíz cuadrada
$x - \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{16}{9}}$	/ Despejamos x
$x = \frac{1}{3} \pm \frac{4}{3}$	

Las soluciones son $x_1 = \frac{5}{3}$ = y $x_2 = -1$

Actividad 3
Realiza los **ejercicios 1, 2 y 3** del “taller” del **Texto del Estudiante** de la página 106 y 107.

Actividad 4
Realiza los **ejercicios 2 y 3** del **Cuaderno de Ejercicios** de la página 49.

Cierre

Evaluación
Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1 **Las soluciones de la ecuación $(x - 1)^2 - 4 = 0$ son:**

a) -1 y -13
b) -1 y -3
c) 3 y -1
d) -3 y -1

2 **El valor que se debe sumar a la ecuación $x^2 - 7x + 5 = 0$ para completar un cuadrado perfecto es:**

a) $\left(\frac{-7}{2}\right)^2$

b) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

c) $(-7)^2$

d) $\left(\frac{-1}{2}\right)^2$

3

Dada la ecuación $x^2 + 2x - 13 = 0$, sus soluciones son:

a) $x_1 = 1 + 2\sqrt{3}$ = y $x_2 = 1 - 2\sqrt{3}$
b) $x_1 = 1 + \sqrt{14}$ = y $x_2 = 1 - \sqrt{14}$
c) $x_1 = -1 + \sqrt{14}$ = y $x_2 = -1 - \sqrt{14}$
d) $x_1 = -1 + 2\sqrt{3}$ = y $x_2 = -1 - 2\sqrt{3}$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ___________________________________.

2º
medio

Texto escolar

Matemática

Unidad
2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Tema 3: ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?

¿Qué aprenderé?

A comprender y aplicar el algoritmo de la completación de cuadrados.

¿Para qué?

Para resolver ecuaciones cuadráticas que no sean simples de factorizar.

Actividad en pareja

Taller

Otra forma de resolver ecuaciones cuadráticas también se refiere a separar la ecuación en dos ecuaciones lineales, pero solo en ciertos casos.

1 Observen el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + 36 &= 9 \\ (x + 6)^2 &= 9 \\ x + 6 &= \sqrt{9} \\ x + 6 &= 3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

a. ¿Cómo podrían describir los pasos aplicados para resolver esta ecuación?

b. ¿La solución es correcta?

c. ¿Existe otra solución?, ¿por qué?

d. Resuelvan la ecuación $x^2 + 12x + 36 = 9$ utilizando el método por factorización. ¿Qué pueden concluir?

2 Observen el siguiente desarrollo y comenten.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x - 38 &= 10 \\ x^2 - 8x &= 48 \\ x^2 - 8x + 16 &= 48 + 16 \\ (x - 4)^2 &= 64 \end{aligned}$$

$$x - 4 = \sqrt{64} \qquad x - 4 = -\sqrt{64}$$

$$x - 4 = 8 \qquad x - 4 = -8$$

$$x_1 = 12 \qquad x_2 = -4$$

a. ¿Por qué se suma 16 a ambos lados de la ecuación?

b. ¿Esto cambia las soluciones de la ecuación?, ¿por qué?

c. ¿Qué relación tiene 16 con los demás términos de la ecuación?, ¿cómo se determina ese valor?

d. ¿Por qué la ecuación cuadrática se separa en dos ecuaciones lineales de esa manera?

e. ¿Las soluciones son correctas?, ¿existe otra solución?

3 Describan, paso a paso, este método para resolver una ecuación cuadrática.

a. ¿En qué casos no se pueden determinar las soluciones mediante este método?

b. ¿Cómo se puede reconocer una ecuación que no tenga solución en los números reales al aplicar este algoritmo? Expliquen.

¿Cómo trabajé el taller?	
Individualmente	○ ○ ○
Grupalmente	○ ○ ○

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	
Individualmente	○ ○ ○
Grupalmente	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Observa los pasos para resolver $2x^2 - 3x - 2 = 0$ aplicando la completación de cuadrados y determina sus soluciones.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Se simplifica por el valor de ***a*** $\quad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$

Si tiene término libre en el lado derecho $\quad x^2 - \frac{3}{2}x = 1$

Divide el coeficiente de ***x*** por 2, elévalo al cuadrado y súmalo a ambos lados de la igualdad.

Se completa el cuadrado de binomio $\quad x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 1 + \frac{9}{16}$

Se factoriza $\quad \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

¿Por qué esta ecuación tiene dos soluciones?

En resumen

El algoritmo de **completación de cuadrados** consiste en transformar una ecuación cuadrática, ya sea que esté escrita en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ o no, en una ecuación de la forma $(x - m)^2 = n$, siguiendo estos pasos:

1º Cuando la ecuación está en su forma general, si $a \neq 1$ se divide por a, y se resta el término independiente a ambos lados de la ecuación, de modo que quede de la forma: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

2º Se calcula el término que permite completar el cuadrado: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ y se suma a ambos lados de la igualdad.

3º En el lado izquierdo, se factoriza como un cuadrado de binomio y en el derecho, se calcula la suma para dejar solo un número racional. Si este resultado es negativo, la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

4º Se separa en dos ecuaciones. Como en el lado izquierdo hay una expresión algebraica que está al cuadrado, al escribir las ecuaciones lineales deba considerarse los dos signos. Es decir, se escribe una ecuación con el signo positivo (para el lado derecho) y otra con el signo negativo.

5º Luego, se resuelven las ecuaciones lineales resultantes y se expresa cada solución por separado.

Tema 3 ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?

Practico

1 Completa los siguientes cuadrados de binomio.

a. $x^2 + 10x +$ ______ = (______)^2

b. $x^2 - \frac{3}{2}x +$ ______ = (______)^2

c. $x^2 + 16x +$ ______ = (______)^2

d. $x^2 - \frac{6}{5}x +$ ______ = (______)^2

e. $x^2 - 20x +$ ______ = (______)^2

f. $x^2 - 2\sqrt{3}x +$ ______ = (______)^2

g. $x^2 + 30x +$ ______ = (______)^2

h. $x^2 + \frac{10}{3}x+$ ______ = (______)^2

i. $x^2 +$ ______ $+ 36 =$ (______)^2

j. $x^2 +$ ______ $+ 64 =$ (______)^2

k. $x^2 +$ ______ $+ 18 =$ (______)^2

2 Utiliza el método de completar cuadrados para resolver las siguientes ecuaciones.

a. $(3x - 4)^2 = 64$

R: ______

b. $(x - 2)^2 = 20$

R: ______

c. $x^2 - 22x + 7 = 0$

R: ______

d. $x^2 - 14x + 3 = 0$

R: ______

e. $x^2 - 8x + 10 = 0$

R: ______

f. $x^2 - 4x + 1 = 0$

R: ______

g. $x^2 - 10x + 24 = 0$

R: ______

h. $2x^2 + x - 12 = 0$

R: ______

i. $4x^2 + 4x - 3 = 0$

R: ______

3 Asocia cada ecuación de segundo grado con su equivalente. Para ello, escribe la letra correspondiente.

A	B	C
$\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$	$(x + 4)^2 = 4$	$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
D	**E**	**F**
$(x - 5)^2 = 1$	$(x - 3)^2 = 7$	$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

a. $x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow$ ______

b. $x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow$ ______

c. $2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow$ ______

d. $x^2 + 8x + 12 = 0 \rightarrow$ ______

e. $4x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow$ ______

f. $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow$ ______

4 Una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede escribir de la forma $a(x + h)^2 + k = 0$ mediante el proceso de completar cuadrados. Determina el valor de a, h y k en cada caso.

a. $x^2 - 16 = 0$

a: ______ h: ______ k: ______

b. $x^2 - 5x + 2 = 0$

a: ______ h: ______ k: ______

c. $x^2 + 6x + 1 = 0$

a: ______ h: ______ k: ______

d. $3x^2 + 6x + 12 = 0$

a: ______ h: ______ k: ______

e. $x^2 + 4x - 21 = 0$

a: ______ h: ______ k: ______

f. $x^2 + 14x + 49 = 0$

a: ______ h: ______ k: ______

5 Explica, paso a paso, cómo completas un cuadrado de binomio.

R: ______

______