1º medio

# Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

## Clase 36

# Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

## Inicio

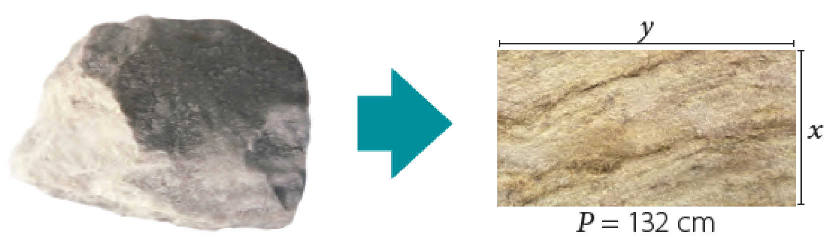
El objetivo de esta clase es conocer el método gráfico para resolver **sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

**Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.**

## Desarrollo

Para comenzar a trabajar en las diferentes actividades, es necesario que analicemos la primera situación que se presenta en la página 106 **del Texto del Estudiante**.

Un grupo de artesanos tienen un trozo de mármol. Para trabajarlo de mejor manera, moldearán una parte para obtener un trozo, de forma rectangular y con la condición de que la medida de su largo ($y$) sea el doble de la medida de su ancho ($x$).




¿Cuáles son las medidas del largo ($y$) y el ancho ($x$)?

- ¿Es correcto afirmar que para responder a la pregunta planteada se deben resolver simultáneamente las restricciones que se muestran? Explica.

1. $2x + 2y = 132$ → Perímetro rectángulo.
2. $2x - y = 0$ → El largo mide el doble del ancho.

Como ya lo hemos visto en clases anteriores el perímetro es la suma de los lados de una figura, en este caso tenemos:

$$P = 2x + 2y$$

Y como nos dicen cuanto es la medida del perímetro resulta:

$$132 = 2x + 2y$$

Para saber las medidas de los lados del trozo de mármol, pueden ser muchas opciones lo importante es que estás mantengan la condición anterior, que es que la suma del doble de cada lado debe ser igual a 32, por ejemplo, podría ser:

$x = 20$ e $y = 46$

Ahora con respecto a la pregunta, al saber una segunda condición, podemos saber con mas exactitud las medidas, ya que:

- ¿Es correcto afirmar que para responder a la pregunta planteada se deben resolver simultáneamente las restricciones que se muestran? Explica.

$$\begin{array}{ll|l} ❶ & 2x + 2y = 132 & \longrightarrow \text{Perímetro rectángulo.} \\ ❷ & 2x - y \;\; = 0 & \longrightarrow \text{El largo mide el doble del ancho.} \end{array}$$

Si el largo es el doble del ancho, podemos reemplazar una variable, es decir:

$$2x - y = 0$$
$$2x = y$$

Entonces reemplazamos

$$2x + 2 \cdot x = 132$$
$$4x = 132$$
$$x = 33\text{cm}$$

Luego como y = 2x, el otro lado mide y = 66cm

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario del Texto del Estudiante**, página 292.

**Actividad 1:**
Resuelve los **ejercicios de la actividad inicial** de la página 106 del **Texto del Estudiante** que faltan por responder.

Ahora, analicemos el cuadro concepto que está en la página 196 del **Texto del Estudiante.**

## Conceptos

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$

Donde $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ y $f$ son números racionales y $x$ e $y$ son las incógnitas.

Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al remplazarlas en las ecuaciones se satisfacen ambas igualdades.

Tomaremos como ejemplo el **ítem 1** de la página 35 de tu cuaderno de ejercicios

1. En un monedero hay un total de \$ 8 500, distribuidos en 33 monedas. Algunas son \$ 100 y el resto son de \$ 500. De acuerdo a estos datos, Pilar y Mario escribieron dos sistemas de ecuaciones diferentes.

Pilar

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 33 \\ 100x + 500y = 8\,500 \end{array}\right|$$

Mario

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 8\,500 \\ \dfrac{x}{500} + \dfrac{y}{100} = 33 \end{array}\right|$$

Anotemos los datos que hay en el enunciado.

**Datos:**

- ✓ Cantidad de tipos de monedas: $x$ e $y$
- ✓ En total hay 33 monedas
- ✓ Tipos de monedas: 500 y 100
- ✓ Total de dinero: 8 500

Entonces, con los datos podemos ir formando ecuaciones.

1º Tomamos los datos que hablan de cantidad de monedas:

- ✓ Cantidad de tipos de monedas $x$ e $y$
- ✓ En total hay 33 monedas

Con esos dos datos tenemos: $x + y = 33$

2º Tomemos los datos relacionados a dinero:

- ✓ Tipos de monedas: 500 y 100
- ✓ Total de dinero: 8 500

Acá, tendríamos: $500 + 100 = 8\,500$, pero si vemos la igualdad no es correcta, ya que debemos asociarla la cantidad que hay de cada tipo, es decir:

$$500x + 100y = 8\,500$$

Por lo que el sistema de forma de dos ecuaciones:

$$\begin{gathered} x + y = 33 \\ 500x + 100y = 8\,500 \end{gathered}$$

Por lo que encontramos la ecuación de Pilar. En el caso de Mario, el establece sus variables de manera diferente. Descúbrelo en la siguiente actividad.

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario del Texto del Estudiante**, página 91.

**Actividad 2:**

Responde las preguntas **a y b** de el **ítem 1** de la página 35 de tu **cuaderno de ejercicios.**

Para poder resolver un sistema de ecuaciones, existen diferentes métodos, uno de ellos es el método gráfico. Analicemos el cuadro concepto de la página 108 del **del Texto del Estudiante.**

### Conceptos

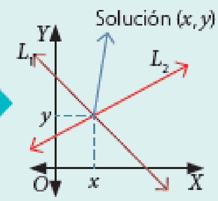
Para resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones lineales, se representan en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación. La solución del sistema, cuando existe y es única, será al punto de intersección de ambas rectas.

Al graficar el sistema de ecuaciones: $\begin{array}{|l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$

Con $a, b, c, d, e$ y $f$ números racionales distintos de cero, se tienen 3 posibles casos:

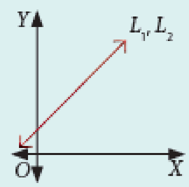
**Caso 1.** El sistema es **compatible**, es decir, tiene **una única solución** y es cuando las dos rectas son secantes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$



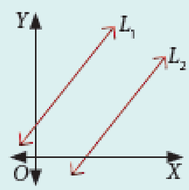

**Caso 2.** El sistema es **compatible indeterminado**, es decir, tiene **infinitas soluciones** y es cuando las dos rectas son coincidentes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



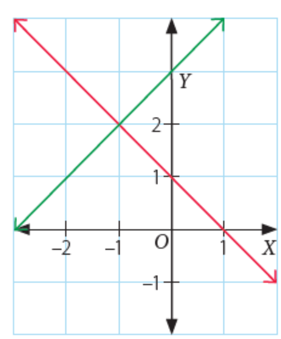

**Caso 3.** El sistema es **incompatible**, es decir, **no tiene solución**, y es cuando las dos rectas son paralelas no coincidentes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$




Ejemplo 3

¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas $L_1$ y $L_2$?




Las rectas se intersecan en el punto (–1, 2), por lo tanto el sistema tiene solución única y es compatible.

En resumen, un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede tener 3 casos posibles de respuestas: Solución única, Solución infinitas y sin solución.

Con esta información, puedes realizar las siguientes actividades:

**Actividad 3:**
Responde las afirmaciones **a, b, c y d** el **ítem 2** de la página 35 de tu **cuaderno de ejercicios.**

Recuerda siempre ir verificando tus respuestas en el **solucionario del Texto del Estudiante**, página 91.

Para la siguiente actividad tomaremos como ejemplo el **ejercicio d** de la página 35 de tu **cuaderno de ejercicios.**

**3.** Decide en cada caso y marca con un ✔ si el sistema tiene solución o con una ✘ si no tiene solución. No resuelvas ningún sistema.

**a.** ◯ $\begin{array}{r|} \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}y = 2 \\ 4x + \frac{1}{2}y = 6 \end{array}$

**b.** ◯ $\begin{array}{r|} 6x + 6y = 20 \\ 2x + 2y = 5 \end{array}$

**c.** ◯ $\begin{array}{r|} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 6 \end{array}$

**d.** ◯ $\begin{array}{r|} 200x + 100y = 20 \\ 4x + 3y = 3 \end{array}$

Para saber si tiene solución o no, debemos analizar las ecuaciones, si estas son iguales o una es la amplificación de la otra, significa que son paralelas, por ende, no tiene solución. En cambio, si no son iguales y tampoco una es la amplificación de la otra quiere decir que tiene solución, tanto única o infinitas.
Analicemos las ecuaciones del ejercicio d

**d.** ◯ $\begin{array}{r|} 200x + 100y = 20 \\ 4x + 3y = 3 \end{array}$

Al mirarlas no son iguales, pero debemos ver si una no es la amplificación de la otra.

Al observar la **primera ecuación**, podemos simplificarla hasta su mínima expresión, es decir, podemos dividir por 20 todos sus términos
200x + 100y = 20 / :20
10x + 5y = 1

La **segunda ecuación**, ya está simplificada a su mínima expresión, por ende, tenemos
4x + 3y = 3
Finalmente, las ecuaciones no son iguales ni una es la amplificación de la otra, entonces tiene solución.

**d.** ✓ $\begin{array}{r|} 200x + 100y = 20 \\ 4x + 3y = 3 \end{array}$

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario del Texto del Estudiante**, página 91.

**Actividad 4:**
Resuelve los ejercicios **a, b y c** el **ítem 3** de la página 35 de tu **cuaderno de ejercicios.**

Recuerda siempre ir verificando tus respuestas en el **solucionario del Texto del Estudiante**, página 91.

## Cierre

**Evaluación**
Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

**1** **En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 20° mayor que el otro. ¿Qué sistema de ecuaciones permite determinar la medida de los ángulos del triángulo?**

**a)** $\begin{cases} x = 20°y \\ x + y = 90° \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x + y + 90° = 180° \\ x = 20° + y \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} x + y = 90° \\ x = 20°\, y \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x + y + 90° = 180° \\ x = 20°y \end{cases}$

**2** **El doble de un número más la mitad de otro suman 7; y, si sumamos 7 al primero de ellos, obtenemos el quíntuplo del otro. ¿Qué sistema permite encontrar estos números?**

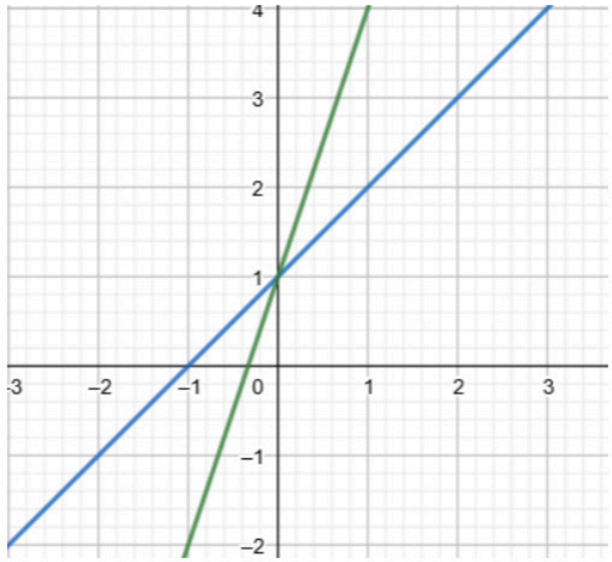
**a)** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 7 = 5 + y \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2x + \frac{y}{2} = 7 \\ x + 7 = 5 + y \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} 2x + \frac{y}{2} = 7 \\ x + 7 = 5y \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 7 = 5y \end{cases}$

**3** **Observa la siguiente gráfica:**




Si el gráfico anterior representa un sistema de ecuaciones de dos incógnitas, ¿cuántas soluciones tiene?

**a)** Una solución.
**b)** Dos soluciones.
**c)** Infinitas soluciones.
**d)** No tiene solución.

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

| | |
|---|---|
| 3 respuestas correctas: | Logrado. |
| 2 respuestas correctas: | Medianamente logrado. |
| 1 respuesta correcta: | Por lograr. |

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

| |
|---|
| Mi aprendizaje de la clase número ______ fue: ________________________________. |

1º medio

# Texto escolar

## Matemática

Unidad 2

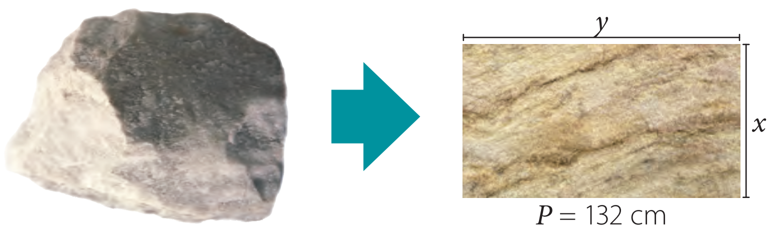
A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

# Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

**Objetivos**

- Comprender sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolver de manera gráfica sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un grupo de artesanos tienen un trozo de mármol. Para trabajarlo de mejor manera, moldearán una parte para obtener un trozo, de forma rectangular y con la condición de que la medida de su largo ($y$) sea el doble de la medida de su ancho ($x$).




¿Cuáles son las medidas del largo ($y$) y el ancho ($x$)?

- ¿Es correcto afirmar que para responder a la pregunta planteada se deben resolver simultáneamente las restricciones que se muestran? Explica.

$$\left.\begin{array}{ll} ❶ & 2x + 2y = 132 \\ ❷ & 2x - y \;\;\; = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Perímetro rectángulo.} \\ \longrightarrow \text{El largo mide el doble del ancho.} \end{array}$$

______________________________________________

- Completa la siguiente tabla con valores para cada ecuación.

❶ $2x + 2y = 132$ ▸ $y = -x + 66$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 22 | | |
| | 0 | |
| 4 | | |

❷ $2x - y = 0$ ▸ $y = 2x$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| | 0 | |
| 12 | | |
| | 44 | |

- ¿Qué valores se repiten? Responde a la pregunta planteada.

______________________________________________

**Conceptos**

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$ Donde $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ y $f$ son números racionales y $x$ e $y$ son las incógnitas.

Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al remplazarlas en las ecuaciones se satisfacen ambas igualdades.

Ejemplo 1

**Catalina y Cristian preparan bombones de chocolate para vender. Para comprar todos los ingredientes disponen de $ 45 000. La materia prima necesaria para completar una caja grande les cuesta $ 500 y para una caja pequeña, $ 300. Si ambos quieren completar 100 cajas en total, ¿cuál es el sistema de ecuaciones que modela la situación descrita?**

PASO A PASO

1. Defines las incógnitas.

   $x$: cantidad de cajas grandes. $y$: cantidad de cajas pequeñas.

2. Defines las ecuaciones.

   La materia prima para una caja grande ($x$) les cuesta $ 500, y para una caja pequeña ($y$) les cuesta $ 300. Además para comprar todos los ingredientes disponen de $ 45 000. Lo anterior se modela por la ecuación: $500x + 300y = 45\,000$.

   Además, en total quieren completar 100 cajas, es decir, la ecuación que lo modela es: $x + y = 100$

3. Planteas el sistema de ecuación: $\left.\begin{array}{r} 500x + 300y = 45\,000 \\ x + y = 100 \end{array}\right|$

Ejemplo 2

**¿Cómo representarías gráficamente el sistema de ecuaciones?**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 2y - x = 3 \end{array}\right|$$

PASO A PASO

1. Se registrarán en una tabla algunos valores para luego ubicarlos en el plano cartesiano.

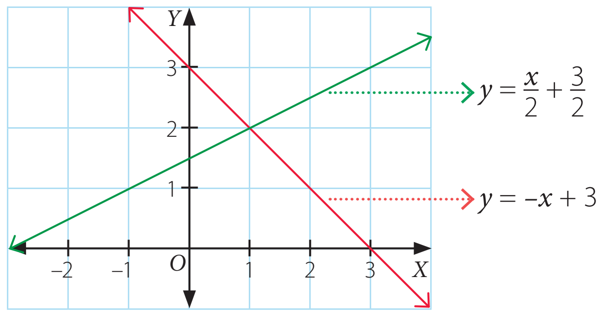
$x + y = 3 \blacktriangleright y = -x + 3$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| 0 | 3 | (0, 3) |
| 1 | 2 | (1, 2) |

$2y - x = 3 \blacktriangleright y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| –1 | 1 | (–1, 1) |
| 1 | 2 | (1, 2) |

2. En el plano cartesiano, se obtiene que:




Analizando el gráfico se puede afirmar que su solución es $x = 1$, $y = 2$, ¿Por qué? Explica.

## Atención

Para graficar una recta en el plano cartesiano, como mínimo necesitas 2 puntos.

# Método de resolución: gráfico

## Conceptos

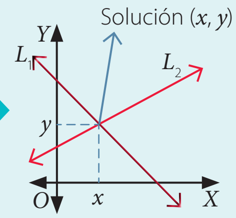
Para resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones lineales, se representan en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación. La solución del sistema, cuando existe y es única, será al punto de intersección de ambas rectas.

Al graficar el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$.

Con $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ y $f$ números racionales distintos de cero, se tienen 3 posibles casos:

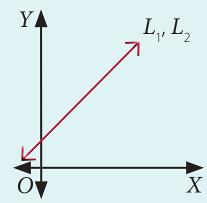
**Caso 1.** El sistema es **compatible**, es decir, tiene **una única solución** y es cuando las dos rectas son secantes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$



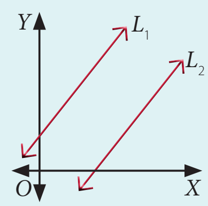

**Caso 2.** El sistema es **compatible indeterminado**, es decir, tiene **infinitas soluciones** y es cuando las dos rectas son coincidentes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



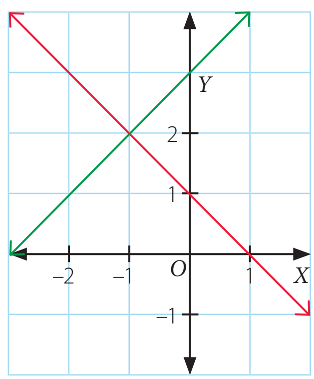

**Caso 3.** El sistema es **incompatible**, es decir, **no tiene solución**, y es cuando las dos rectas son paralelas no coincidentes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$




Ejemplo 3

**¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas $L_1$ y $L_2$?**




Las rectas se intersecan en el punto (–1, 2), por lo tanto el sistema tiene solución única y es compatible.

Ejemplo 4

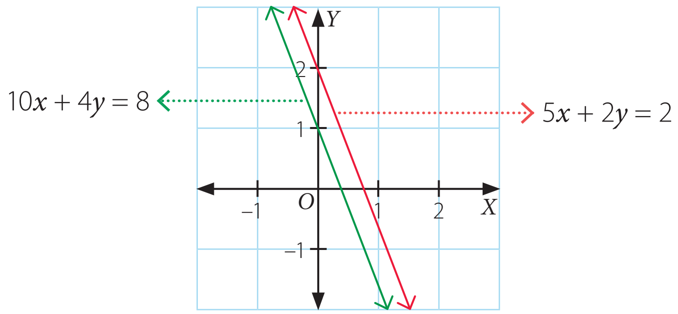
¿Cuál es la clasificación del sistema de ecuaciones? ¿Cuál es la gráfica que lo representa?

$$\begin{array}{r|} 5x + 2y = 2 \\ 10x + 4y = 8 \end{array}$$

PASO A PASO

1 Al calcular el cociente correspondiente, se tiene: $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{2}{4} = 0{,}5$; $\frac{2}{8} = 0{,}25$, es decir, el sistema es incompatible.

2 Su gráfico representa a dos rectas paralelas no coincidentes.




Ejemplo 5

¿Cuál es el valor de $k$ para que el sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones? ¿Cuál es su representación gráfica?

$$\begin{array}{r|} kx + 3y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{array}$$

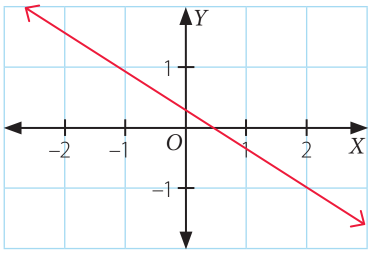
Para que el sistema tenga infinitas soluciones, se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{k}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1}$$

Luego $\frac{k}{2} = 1$, de donde se obtiene $k = 2$. El sistema de ecuaciones es

$$\begin{array}{r|} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{array}$$

Su representación gráfica corresponde a dos rectas coincidentes.




Si el sistema anterior es compatible, ¿cuál debe ser el valor de $k$?

# Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

**1.** **En un monedero hay un total de $ 8 500, distribuidos en 33 monedas. Algunas son $ 100 y el resto son de $ 500. De acuerdo a estos datos, Pilar y Mario escribieron dos sistemas de ecuaciones diferentes.**

Pilar

$$\begin{cases} x + y = 33 \\ 100x + 500y = 8\,500 \end{cases}$$

Mario

$$\begin{cases} x + y = 8\,500 \\ \dfrac{x}{500} + \dfrac{y}{100} = 33 \end{cases}$$

**a.** ¿Qué representa $x$ e $y$ en cada caso, en el contexto de la situación inicial?

**b.** ¿Cuántas monedas de cada valor hay? Explica cómo lo calculaste.

**2.** **Verifica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.**

**a.** ◯ La ecuación $2x - 5y = 4$ tiene infinitas soluciones.

**b.** ◯ Un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas es compatible si las rectas que lo conforman tienen al menos dos puntos en común.

**c.** ◯ Para mostrar que un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas es incompatible, se debe realizar la representación gráfica de las ecuaciones.

**d.** ◯ Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre tiene, por lo menos, una solución.

**3.** **Decide en cada caso y marca con un ✔ si el sistema tiene solución o con una ✘ si no tiene solución. No resuelvas ningún sistema.**

**a.** ◯ $\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}y = 2 \\ 4x + \frac{1}{2}y = 6 \end{cases}$

**b.** ◯ $\begin{cases} 6x + 6y = 20 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$

**c.** ◯ $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$

**d.** ◯ $\begin{cases} 200x + 100y = 20 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$